数理解析研究所講究録
365巻 1979年 23-45

On standard involutions

北大・理　神島芳宣

Introduction

この論文において，$(2n-1)$次元 homotopy spheres 上の fixed point free smooth involutions を調べる。López De Medrano，Orlik 及び北田により，bP_{2n} $(n \geqq 3)$ の各元は free involutions をもつことが知られている．ここで bP_{2n} は parallelizable mfds を bound する $(2n-1)$-homotopy spheres のつくる群である．bP_{2n} の各元に対し actions が存在する時，次にそれらがどのように分類されるかが問題となる．我々は次の involutions を考えることによって，この問題に approach する．

T を homotopy sphere $\Sigma^{2n-1} \in bP_{2n}$ $(n \geqq 3)$ 上の free involution とする。<u>もし</u> Σ <u>が</u> <u>bound</u> <u>する</u> <u>parallelizable</u> <u>mfd</u> M^{2n} <u>が</u> <u>存在して</u>，T <u>が</u> M<u>上に</u>

isolated fixed points をもつ involution に拡張する時，(T, Σ) を standard involution とよぶ．

主張は次の通りである．

『homotopy $(4k-1)$-spheres 上の standard involutions の explicit な description を与え，それらによって，standard involutions が分類される』

分類に対しては，若干の free involutions に対する結果及び，$KO^{-1}(P^n)$－等に対する知識を仮定するために，最初の motivation が見失うことがないよう省略させてもらう（詳細は [2] を参照されたい）．ここでは，主張の前半である，standard involutions の explicit な models を与えることに専念する．

1. Geometric models

"Equivariant plumbing technique" により standard involutions の例が構成される．Milnor による plumbing theory は，F. Hirzebruch－M. Mayer

, W.C.-W.Y. Hsiangs 等により, "equivariant plumbing theory" に拡張された、しかしながら, ここで扱う plumbing は最初に S. Weintraub [3] により motivate されたそれによる、一般に homotopy sphere Σ に free involution が与えられ, それが Σ が bound する M に拡張したとしても "unique" に拡張するとは限らない、従って, 構成に対して我々は "uniform way" で M 上の Z_2-actions をつくることが必要である、この時, M 上の actions に対する invariants — 例えば, Atiyah-Singer invariants, Spin invariants, Eells-Kuiper μ-invariants, Signatures — は (T, Σ) の分類に関して情報を与えてくれる.

Notation. $D^n(S^{n-1})$ を, Z_2-action, $t(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \cdots, -x_n)$ をもつ R^n の中の unit disk (sphere) とする. S^n を, S^{n-1} の suspension, i.e., $R^n \times R$ における unit sphere で Z_2-action, $t(x_1, \ldots, x_n, y) = (-x_1, \cdots, -x_n, y)$ をもつものとする.

Lemma 1.1. 任意の integer $n \geqq 3$ に対し，semi-free Z_2-actions T をもつ S^n 上の D^n-bundles E（特に，E_+，E_0 and E_-）が存在して次をみたす．

(1) T は 0-section を preserve する bundle map である．

(2) 0-section 上の the action T は，上の action をもつ S^n であり，T は 0-section の外では fixed pts をもたない。

(3) E は two isolated fixed pts をもち，それらの各 normal representation は，上の (diagonal) action をもつ $D^n \times D^n$ である．

(4) $n = 2K$ ならば，E_+，E_0 及び E_- の Euler class χ は，それぞれ，2，0 and -2 mod any multiple of 4-times をとる（特に，叙述の必要性のために，E_+ と E_- を区別する）．

(5) $n = 2K+1$ ならば，E_+ と E_- は S^{2K+1} 上の tangent disk bundles であり，E_0 は trivial bundle である．

(6) これらの bundles は stably trivial である．

証明．　証明は E_+ に対してする．E_-, E_0 もこれに同様である．$d:S^n \longrightarrow S^n\times S^n$ を diagonal embedding とする．上の action のもとで invariant である．$H_n(S^n\times S^n)=\langle\alpha\rangle+\langle\beta\rangle$ とおく．任意の $\ell\in Z$ に対し，$S^n\times S^n$ の free part の中で $|\ell|$-embedded spheres S^n's をとり，各 embedded sphere は homology 上 β をあらわすようにする．この時，embedding $d(S^n)$ と $|\ell|$-embedded spheres S^n's との equivariant connected sum をとり，それの equivariant normal bundle，

$$d(S^n)\mathop{\#}_{Z_2}|\ell|S^n \hookrightarrow S^n\times S^n \quad ,$$

をとることにより，action に関して invariant な S^n 上の stably trivial normal bundle E_+ がある (Figure I)．E_+ は Euler class，

$$\begin{aligned}\chi(E_+)&=(\alpha+(2\ell+1)\beta)\cdot(\alpha+(2\ell+1)\beta)\\ &=2+4\ell\end{aligned}$$

である．

明らかに (1)，(2)，(3) をみたす．

一方，E_-, E_0 に対しては，$g:S^{n-1}\longrightarrow S^{n-1}$ を $g(x_1,\cdots,x_n)=(-x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とおくことにより，equivariant diffeomorphism を定義する．この時，Z_2-action をもつ sphere を，

$$S_1^n = D^n \bigcup_g D^n$$

により定ぎする（もちろん，S^nと同じものである）．
この時，equivariant embeddings

$$d' : S_1^n \longrightarrow S_1^n \times S_1^n$$

and

$$\iota : S_1^n \longrightarrow S_1^n \times S^n$$

をそれぞれ

$$d'((x_1, \ldots, x_n, y)) = ((x_1, \ldots, x_n, y), (-x_1, x_2, \ldots x_n, y))$$

$$\iota(z) = (z, z_1) \quad , \quad (x_1, \ldots, x_n, y), z \in S_1^n$$

，z_1はS^nの一つのfixed point．これらを使って，上と同様なことをすることにより，E_-，E_0がつくられる．

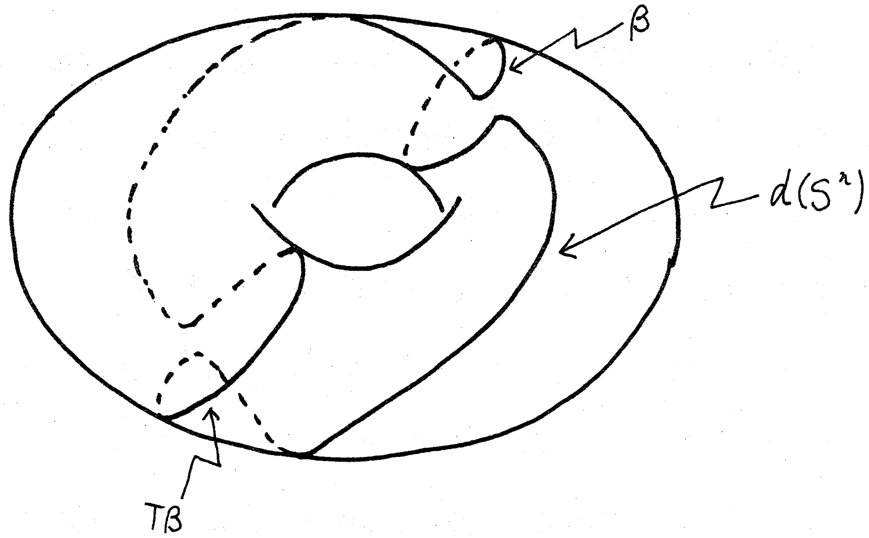


Figure I （ℓ=I）．

次にこれらの bundle を使って，plumbing した時の manifold に対する "<u>normal</u> <u>cobordism</u>" をつくる（※normal cobordism 等の説明は省くため，以下 lemma 1.2〜1.4 は，とばして，直接 Prop. 1.5 から読むことができるように，Prop. 1.5 において，配慮しておく）

N_1, N_2 を E における二つの fixed points の equivariant tubular neighborhoods とする．これらは Lemma 1.1 の (3) における $D^n \times D^n$ の中に含まれるようにしておく．

$$W^{2n} = \left(E - \mathrm{int}\left\{\bigcup_{i=1}^{2} N_i\right\}\right)/T \quad \text{とおく}$$

（$E = E_+$ ならば $W = W_+$ などとおく）．

Lemma 1.2． W は $\partial E/T$ と $\left\{\bigcup_{i=1}^{2}\partial N_i/T\right\}$ との "normal cobordism" を定ぎする，i.e.，normal map $H: W \longrightarrow P^{2n-1}$ が存在し，一つの bundle map $b: \nu_W \longrightarrow \nu_P$ によって covered される．ここで ν_W, ν_P は W，P^{2n-1} の stable normal bundles である．さらに，boundary components の inclusion maps を，みる時，$H \mid (D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_i)/T$ $: D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_i/T \longrightarrow P^{2n-1}$ 及び $H_- = H \mid \partial N_i/T$ $: \partial N_i/T \longrightarrow P^{2n-1}$ は次の通りである．

W	$(H \mid D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_i/_T,\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_i/_T)$	$(H \mid \partial N_i/_T,\ \partial N_i/_T)$
W_+	$(Pr(1\times 1),\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_i/_T)$ $i=1,2$	$(1\times 1,\ P^{2n-1})_{i=1,2}$
W_0	$(Pr(1\times 1),\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_1/_T)$ $(Pr(1\times 1),\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_2/_T)$	$(1\times 1,\ P^{2n-1})$ $i=1$ $(c\times 1,\ P^{2n-1})$ $i=2$
W_-	$(Pr(1\times c),\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_1/_T)$ $(Pr(c\times 1),\ D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_2/_T)$	$(1\times c,\ P^{2n-1})$ $i=1$ $(c\times 1,\ P^{2n-1})$ $i=2$

ここで c は，map $\tilde{c}: D^n \longrightarrow D^n$,
$\tilde{c}(x_1, \ldots, x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n)$ により induce された orientation reversing diffeomorphism である．

Note. H は degree 1 map でない．

証明．　D^{n+1} を R^{n+1} における unit disk とし，the Z_2-action を $t(x_1, \ldots, x_n, y) = (-x_1, \ldots, -x_n, y)$ により定める．S^n の fixed points は $z_1 = (\bar{0}, 1)$, $z_2 = (\bar{0}, -1)$, $\bar{0} = (0, \ldots, 0) \in R^n$．この時，$E$ の construction から次の equivariant embedding がある．

$$E - \mathrm{int}\left\{\bigcup_{i=1}^{2} N_i\right\} \subset D^{n+1}\times D^{n+1} - (\bar{0}\times D^1)\times(\bar{0}\times D^1)$$
$$\cong (D^n\times D^n - \bar{0}\times\bar{0})\times D^2.$$

上において，D^2-part における action は trivial である．
従って，quotient spaces への embedding

(1) $\qquad W \subset P^{2n-1}\times I\times D^2$

を induce し，trivial normal bundle をもつ．従って，normal bundle ν_W は，P^{2n-1} のそれから induce される．故に W は "normal cobordism" を定義する．即ち normal map $H: W \longrightarrow P^{2n-1}$ が存在して，bundle map $b: \nu_W \longrightarrow \nu_P$ によって cover される．boundary components の inclusion maps を注意することにより，E_+, E_0, E_- のそれぞれに対して，上の表を得る．

上の bundles が equivariantly に plumbed される時，できた manifold の normal cobordism は上の lemma における normal cobordism の各 block より得られることを示す．

Lemma 1.3. E^i's が，それぞれの fixed point のまわりで，次々と equivariantly plumbed されたとする．その結果，できた Z_2-action T をもつ manifold を M' とする． M' における fixed points の equivariant neighborhoods を $N(Pts)$ とする，従ってそれらは，lemma 1.2 におけるような N_i ，$i=1,2$ の union である．この時， cobordism $V' = (M' - \mathrm{int}\, N(pts))/T$ は normal cobordism $G' : V' \longrightarrow P^{2n-1}$ between $\partial M'/T$ and $\bigcup_j \{\partial N_i/T, i=1,2\}$ (j は fixed point set を動く)，を定ぎし，一つの bundle map $b' : \nu_{V'} \longrightarrow \nu_P$ により cover される．

上の lemma のもとで，さらに次のことが成立する

Lemma 1.4. もし，さらに，M' における action の free part において，equivariant plumbings をするならば，そして M によって，その結果の manifold を定ぎすれば，この時， resulting cobordism

$$V = (M - \mathrm{int}\, N(pts))/T$$

は，normal cobordism $G : V \longrightarrow P^{2n-1}$

between $\partial M/T$ and $\bigcup_j \{\partial N_i/T, i=1,2\}$ を定ぎする.

G は, boundary components 上変わらない, i.e.,

$$G \mid \bigcup_j \{\partial N_i/T, i=1,2\} = G' \mid \bigcup_j \{\partial N_i/T, i=1,2\}.$$

証明 (lemma 1.3). Lemma 1.1 の normal representations また lemma 1.2 のそらの上の normal maps は equivariantly に plumb する方法を与える. 即ち, 二つの spaces $D^n \times D^n$ は map $h: D^n \times D^n \longrightarrow D^n \times D^n$, $h(x,y)=(y,x)$ により equivariantly diffeomorphic である. quotient spaces 上の plumbings を考える時, E^1 と E^2 を一つの fixed point で equivariantly に plumb することは, (我々は, このことが $z_2 \in N_2 \subset E^1$ と $z_1 \in N_1' \subset E^2$ で行われると仮定する) — $(E^1 - \mathrm{int}\{N_1 \cup N_2\}/T) \cup (E^2 - \mathrm{int}\{N_1' \cup N_2'\}/T)$ をとり, $(D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_2)/T$ と $(D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_1')/T$ とを, h より induce される map h' により identify することと同値である. もし E^1 と E^2 が上のように plumb される時その manifold を M' とおくと, resulting cobordism V' は $V' = (M' - \mathrm{int}\{N_1 \cup N_2 \cup N_2'\})/T$ である. ここで $N_1' \subset E^2$ は $N_2 \subset E^1$ と identify されている.

この時，lemma 1.2 における表を較べることにより次の diagram は commutative である

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} (D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_2)/T & \xrightarrow{H} & P^{2n-1} \\ \Big\downarrow h' & & \Big\downarrow h' \\ (D^n \times D^n - \mathrm{int}\, N_1')/T & \xrightarrow{H'} & P^{2n-1} \end{array}$$

さらに表における H の形と normal cobordism の construction から，(1) は H を cover する stable normal bundles の bundle maps b と compatible である．故に，V' は $\partial M'/T$ と $\{\partial N_1/T \cup \partial N_2/T \cup \partial N_2'/T\}$ との間の normal cobordism を定義する．さらに bundles が fixed point のまわりで plumb される時，上のことが成り立つから，このように続けて，我々は結果を得る．

証明（lemma 1.4）． M' において，action の free part でさらに equivariantly plumb する．このことは，二つの spaces $D_i^n \times D_i^n \subset V'$ をとり，$D_1 \times D_1$ と $D_2 \times D_2$ を map $h : D_1 \times D_1 \longrightarrow D_2 \times D_2$, $h(x, y) = (y, x)$ により identify することによって

なされる．Lifting は その cover M' において 2-plumbings を与える．その manifold を M によって定ぎする．もし，$(G', b') : V' \longrightarrow P^{2n-1}$ を lemma 1.3 における一つの normal map とするならば，homotopy extension theorem を使って，

$$G'|D_1 \times D_1 = (G'|D_2 \times D_2) \cdot h$$ となるように

arrange することができる．さらにこれは boundary components $\bigcup_j \{\partial N_i/T, i=1,2\}$ 上変えることなしにできる．V を $D_1 \times D_1$ と $D_2 \times D_2$ とが h により identify された時の cobordism とすると，$V = (M - \mathrm{int}\,N(pts))/T$ である．上の compatiblity は，一つの map G : $V \longrightarrow P^{2n-1}$ を与える．この時，h を cover する $\nu_{V'}|D_1 \times D_1$ と $\nu_{V'}|D_2 \times D_2$ との間の bundle equivalence を選んで，bundle covering homotopy theorem を使って，$b'|(\nu_{V'}|D_1 \times D_1)$ と $b'|(\nu_{V'}|D_2 \times D_2)$ とが compatible になるように arrange する．その結果，これは一つの bundle map $b : \nu_V \longrightarrow \nu_P$ を与える．故に $G : V \longrightarrow P^{2n-1}$ は normal cobordism である．action の free part でさらに plumbings をする時，各 step ごとに上の議論を続けることにより結果を得る．

以上のlemmasを使って$(4K-1)$-次元のstandard involutionsの例をつくる。

（注意. Lemma 1.2 の上で述べたように，次のpropositionにおいて，$\{\ \}_i$ は，Lemma 1.2〜1.4からの結果である，従って，この部分に対応する直観的な図ならびに証明 $\boxed{}_i$ をつけ加えておく。（本質的なことは，分類のために，normal cobordismsを用いたことである）。

Proposition 1.5. Σ_1 を bP_{4K} $(K\geqq 2)$ の generator とする。この時，任意の $\ell \geqq 1$ に対し，standard involutions の次のような例がある。（次頁参照）

証明. m を positive integer. 次の，unimodular, even, symmetric matrices with the rank $8m$（その index も $8m$）を導入する

$$H_m^+ = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2 & 4m+1 \\ 0 & & & 4m+1 & 2m(8m+3) \end{pmatrix}, \quad H_m^- = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2 & 4m-1 \\ 0 & & & 4m-1 & 2(8m^2-5m+1) \end{pmatrix}.$$

Table 1

Type	(A, S^{4K-1})	$(T^-_{2\ell-1}, \Sigma^{4K-1}_{(2\ell-1,-)})$	$(T^+_{2\ell-1}, \Sigma^{4K-1}_{(2\ell-1,+)})$	$(T^-_{2\ell}, \Sigma^{4K-1}_{(2\ell,-)})$	$(T^+_{2\ell}, \Sigma^{4K-1}_{(2\ell,+)})$
Browder – Livesay invariant	0	$2\ell-1$	$2\ell-1$	2ℓ	2ℓ
Nomal cobordism class	(P, id) $P=P^{4K-1}$	$(8(2\ell-1)-1)(P,id)$	$(8(2\ell-1)+1)(P,id)$	$(8(2\ell)+1)(P,id)$	$(8(2\ell)-1)(P,id)$
Spin invariant mod 2^{2K}	± 1	$\pm(8(2\ell-1)-1)$	$\pm(8(2\ell-1)+1)$	$\pm(8(2\ell)+1)$	$\pm(8(2\ell)-1)$
Matrix rank	—	$H^-_{2\ell-1}$ $8(2\ell-1)$	$H^+_{2\ell-1}$ $8(2\ell-1)$	$H^-_{2\ell}$ $8(2\ell)$	$H^+_{2\ell}$ $8(2\ell)$
Differentiable structure	S^{4K-1}	$(2\ell-1)\Sigma_1$	$(2\ell-1)\Sigma_1$	$2\ell\Sigma_1$	$2\ell\Sigma_1$

簡単に上の matrices を

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & 1 \\ & & & 1 & 2 & b \\ 0 & & & & b & a \end{pmatrix}$$

とかくと，次が成り立つ

$$a \equiv \begin{cases} 0 \ (4) \quad , H = H^+_{2\ell}, H^-_{2\ell-1} \\ 2 \ (4) \quad , H = H^+_{2\ell-1}, H^-_{2\ell} \end{cases},$$

$$b \equiv 1 \ (2).$$

Lemma 1.1 から次の bundles をとる

E^i , $i = 1, \ldots, 8m-1$, 各 Euler class は 2.

E^{8m} , その Euler class は a.

これらの E^i を fixed point で equivariantly に plumb する.

その結果できる manifold を M' とすると，これは，

plumbing matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ 0 & & & 1 & a \end{pmatrix}$ を実現する

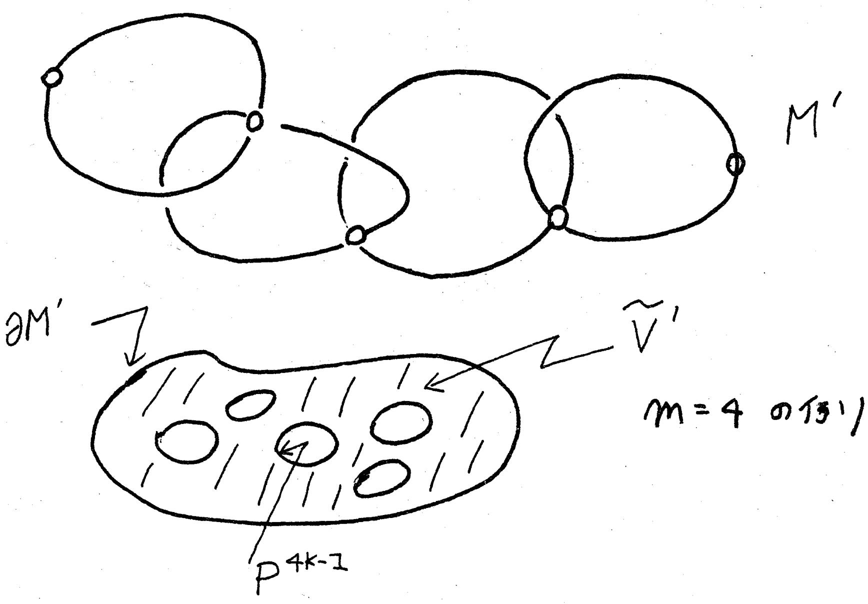
（注意　$H_{2k}(M';Z)$ 上の intersection pairing

が上の matrix であることを意味する.）.

この時，cobordism $V' = (M' - \mathrm{int}((8m+1)\,\mathrm{pts}))/T$ は lemma 1.2 と 1.3 により，normal cobordism $G' : V' \longrightarrow P^{4K-1}$ between $\partial M'/T$ and

$$\begin{cases} (8m+1)(P^{4K-1}, \mathrm{id}) & \text{if } a \equiv 2\ (4) \\ (8m)(P^{4K-1}, \mathrm{id}) \cup (P^{4K-1}, c \times 1) & \text{if } a \equiv 0\ (4) \end{cases}$$

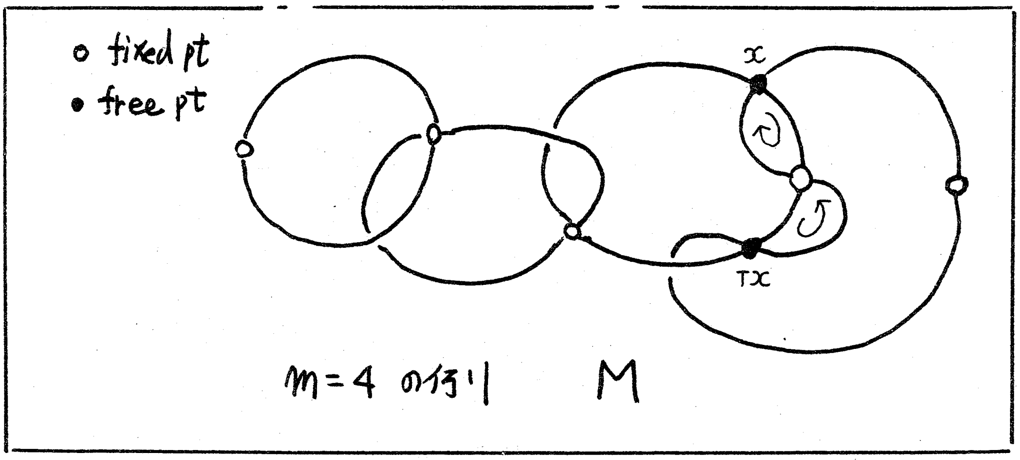
が存在する 1



1

さらにHを実現するために equivariant plumbing をする
従って，一つの Z_2-action をもつ manifold with boundary M ができる.

Lemma 1.4 により normal map $G : V = (M - \mathrm{int}\,N((8m+1)\,\mathrm{pts}))/Z_2 \longrightarrow P^{4k-1}$ between $\partial M/Z_2$ and $\begin{cases} (8m+1)(P^{4k-1}, id) & \text{if } a \equiv 2\ (4) \\ (8m)(P^{4k-1}, id) \cup (P^{4k-1}, c \times 1) & \text{if } a \equiv 0\ (4) \end{cases}$ が存在する (2)



(2)

一方，plumbing theory から次のことが成り立つ

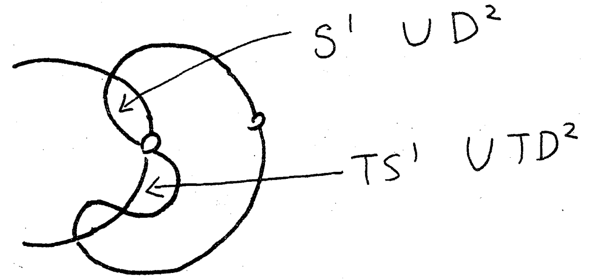
M は connected.　$\pi_1(\partial M) \cong \pi_1(M)$ is free.

$H_i(\partial M) = H_i(M) = 0$，$1 < i < 2k-1$，$H_{2k-1}(M) = 0$.

$(G_+, \partial V_+) = (f', \partial M/Z_2)$ とおく．明らかに $\pi_1(f') = 0$. $\pi_2(f') = \mathrm{Ker}\{f'_* : \pi_1(\partial M/Z_2) \longrightarrow \pi_1(P^{4k-1})\}$ における generator 上の normal surgery に対して，obstruction はないから，trace W と normal map $F' : W \longrightarrow P^{4k-1}$ between $\partial M/Z_2$ and $\partial_+ W$ が

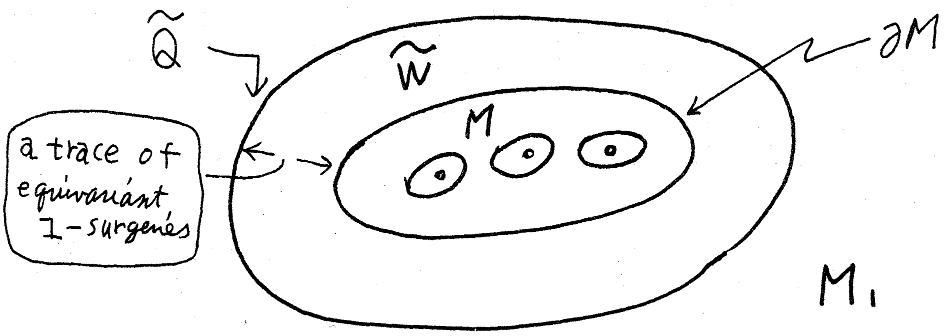
存在して $(F'|\partial_+W, \partial_+W) = (f, Q^{4k-1})$ とおくとき、
f は 2-connected である。 3)

図2)にみられるように $\pi_1(\partial M)$ は free $Z[Z_2]$-module である。即ち、一つの generator $S^1 \hookrightarrow \partial M$ in $\pi_1(\partial M)$ を surgery する時、同時に、image TS^1 も surgery することにより、equivariant 1-surgeries とすることができる



この時、plumbing theory の性質より、このsurgeryにより、1次元以外には影響を与えない。(例えば [1] をみよ) 3)

$\partial M/Z_2$ に沿って、$V_1 = V \cup W$ とおく。また ∂M に沿って
$M_1 = M \cup \widetilde{W}$ $(= \widetilde{V}_1 \cup N((8m+1)\,pts))$ とおく。



The universal cover $\widetilde{Q}$ は parallelizable manifold M_1 を bound する．$H_{2k}(M_1)$ 上の intersection matrix は上の plumbing matrix H である．H は unimodular であり，plumbing に関する上の事実から，$\pi_i(\widetilde{Q})=0$, $i<4k-1$．故に Q は一つの homotopy projective space である．ここで，上のことから得られた M_1 上の Z_2-action を $H=H^{\pm}_{m}$ に従って，$T^{\pm}_{m}$ によって定義する．さらに $\widetilde{Q}=\Sigma^{4k-1}_{(m,\pm)}$ とおく．$(4k-1)$ 次元の Browder-Livesay invariant は，Atiyah-Singer invariant に一致するから，次のことに注目する．

$H_{2k}(M_1)$ 上の induced action は trivial であるから（実際，invariant embedded spheres からなる generators をもつ），

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sign}(T^{\pm}_{m}, M_1) &= \text{Index of the intersection matrix on } H_{2k}(M_1) \\
&= \mathrm{Index}(H_m) = 8m.
\end{aligned}
$$

M_1 は isolated fixed points をもつから，local invariants $L(T^{\pm}_{m}, M_1)=0$ である．故に，$(T^{\pm}_{m}, \Sigma^{4k-1}_{(m,\pm)})$ の Browder-Livesay invariant は

$$
\sigma(T^{\pm}_{m}, \Sigma_{(m,\pm)}) = \frac{1}{8}\left(\mathrm{Sign}(T^{\pm}_{m}, M_1) - L(T^{\pm}_{m}, M_1)\right) = m.
$$

The differentiable structure は，

$$\Sigma^{4k-1}_{(m,\pm)} = \frac{1}{8}(\text{Index of } M_1)\Sigma_1 = m\Sigma_1 .$$

次に，$Q = \Sigma_{(m,\pm)} \mathcal{T}^{\pm}_{m}$ は

$$\begin{cases} (8m+1)(P^{4k-1}, id) & \text{if } a \equiv 2\ (4) \\ (8m)(P^{4k-1}, id) \cup (P^{4k-1}, c\times 1) & \text{if } a \equiv 0\ (4) \end{cases}$$

は normally cobordant であるが，$c\times 1$ は orientation reversing diffeomorphism であるから，$(8m)(P^{4k-1}, id) \cup (P^{4k-1}, c\times 1)$ は $(8m-1)(P^{4k-1}, id)$ に normally cobordant である．最初の remark により　$H = H^{+}_{2l-1}, H^{-}_{2l}$ ならば　Q は $(8m+1)(P^{4k-1}, id)$ にまた $H = H^{+}_{2l}, H^{-}_{2l-1}$ ならば $(8m-1)(P^{4k-1}, id)$ にそれぞれ normally cobordant である 4)

4) に対応するものとして，spin invariant の結果を述べる．

$$(*)\ H = \begin{cases} H^{+}_{2l-1}, H^{-}_{2l} \Leftrightarrow a \equiv 2\ (4) \\ H^{+}_{2l}, H^{-}_{2l-1} \Leftrightarrow a \equiv 0\ (4) \end{cases}$$

である．最初にもどって，H を realize する各 bundle の spin invariant を考える．この時，E^i, $i=1,\cdots,8m-1$ までは，tangent disk bundle でよい（その Euler class 2）

から，$\mathrm{spin}(T, \partial E^i) = \pm 2$ である．一方，$a \equiv 2 (4)$ ならば，この bundle E^{8m} は，tangent disk bundle から，つくられたものである．従って，$\mathrm{spin}(T, \partial E^{8m}) = \pm 2$ である，また $a \equiv 0 (4)$ ならば，E^{8m} は，trivial disk bundle からつくられたものである．従って，その spin invariant は 0 であるから，$\mathrm{spin}(T, \partial E^{8m}) = 0$ である．isolated fixed pts の場合，$\{\pm 2, 0\}$ は それぞれ，2点における sign が {同じ，異なる} に対応しているわけであるから，このことに注意して，plumbing した際の符号 (sign) を，計算すると，(＊) より，

$$\mathrm{spin}(T_m^{\pm}, \Sigma_{(\pm, m)}) = \begin{cases} \pm(8m+1) & \text{if } a \equiv 2 (4) \\ \pm(8m-1) & \text{if } a \equiv 0 (4) \end{cases},$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{spin}(T_{2l}^{+}, \Sigma_{(2l,+)}) &= \pm(8(2l)-1) \\ \mathrm{spin}(T_{2l-1}^{-}, \Sigma_{(2l-1,-)}) &= \pm(8(2l-1)-1) \\ \mathrm{spin}(T_{2l-1}^{+}, \Sigma_{(2l-1,+)}) &= \pm(8(2l-1)+1) \\ \mathrm{spin}(T_{2l}^{-}, \Sigma_{(2l,-)}) &= \pm(8(2l)+1) \end{aligned}\right\} \mod 2^{2K}$$

4)

Remark. (T_m, Σ_m) と M_m with boundary Σ_m を (1.5) において，つくられたものとすると，$H_{2K}(M_m)$ は invariant spheres からなる basis をもつ

さらに $\sigma(T_m, \Sigma_m) = \frac{1}{8}\sigma(M_m)$, $\Sigma_m = \frac{1}{8}\sigma(M_m)\Sigma_1$ が成り立っている。ここで，$\sigma(-)$ は index .

References.

[1] W. Browder , *Surgery on simply connected manifolds* , Springer-Verlag 1971

[2] Y. Kamishima , *On standard involutions*, Preprint, 1979.

[3] S. Weintraub , *Semifree Z_p-actions on highly-connected manifolds*, Math. Z. 145 (1975)